

## RİYAZİYYAT

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ  
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА. II.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, С.А.АГАЕВА  
Бакинский Государственный Университет

*Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счетной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье  $u_n(t)$  ( $n=1,2,\dots$ ) по системе  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  искомого решения  $u(t,x)$ . Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)) & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi), & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 & (0 \leq t \leq T), & (3) \end{cases}$$

где  $0 < T < +\infty$ ;  $F, \varphi$  – заданные функции, а  $u(t,x)$  – искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

**Определение.** Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию  $u(t,x)$ , обладающую свойствами:

- а)  $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x) \in C([0,T] \times [0,\pi])$ ;  
 $u_{xxxx}(t,x), u_t(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$ ;
- б) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в  $(0,T) \times (0,\pi)$ ;

в) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле.

### §1. Вспомогательные факты

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведем некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  образует базис в пространстве  $L_2(0, \pi)$ , то очевидно, что каждое решение почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \quad (4)$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (5)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций  $u_n(t)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) сводится к решению следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} F(u(\tau, x)) \sin nx \cdot e^{-n^4(t-\tau)} \, dx \, d\tau \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]), \quad (6)$$

где

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$F(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x)). \quad (8)$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

**Лемма.** Если  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$  – любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции  $u_n(t)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе (6).

3. Обозначим через  $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$  совокупность всех функций  $u(t, x)$  вида

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx,$$

рассматриваемых на  $[0, T] \times [0, \pi]$ , для которых все функции  $u_n(t) \in C^{(l)}([0, T])$  и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)|)^{\beta_i} \right\}^{1/\beta_i} < +\infty,$$

где  $l \geq 0$  – целое число,  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, l}$ ),  $1 \leq \beta_i \leq 2$  ( $i = \overline{0, l}$ ). Норму в этом множестве определим так:  $\|u\| = J_T(u)$ . Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

4. В данной работе, с целью изучения вопроса существования решения почти всюду задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\mathbf{F}(u(t, x)) \in C([0, T] \times [0, \pi]), \quad \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \in C([0, T]; L_2(0, \pi)) \quad (9)$$

и

$$\mathbf{F}(u(t, x))\Big|_{x=0} = \mathbf{F}(u(t, x))\Big|_{x=\pi} = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (10)$$

после интегрирования по частям по  $x$  один раз в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(\tau, x))\} \cos nx \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (11)$$

Отсюда, в свою очередь, имеем:

$$\begin{aligned} u_n'(t) = & -n^4 \cdot \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} - \frac{2n^3}{\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(\tau, x))\} \cos nx \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \cos nx dx \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (11')$$

5. Пусть для натурального числа  $k$

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0, \pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0, \pi), \quad \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left( s=0, \left[ \frac{k-1}{2} \right] \right). \quad (12)$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечетного  $k$ ) и равенством Парсеваля (для четного  $k$ ), легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \varphi_n)^2 \leq \frac{2}{\pi} \cdot \|\varphi^{(k)}(x)\|_{L_2(0, \pi)}^2, \quad (13)$$

где числа  $\varphi_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) определены соотношением (7); кроме того, очевидно, что оценка (13) верна и при  $k=0$  если  $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ .

6. Очевидно, что если  $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2, T}^k$  ( $k \geq 1$  – целое число), то  $\forall t \in [0, T]$ :

$$\|u\|_{B_{2,T}^{k-1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^k}. \quad (14)$$

## §2. Исследование единственности решения почти всюду задачи (1)-(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

**Теорема 1.** Пусть

1.  $F(t, x, u_1, u_2, u_3) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$ .
2.  $\forall R > 0$  в  $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^3$

$$|F(t, x, u_1, u_2, u_3) - F(t, x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)| \leq C_R \cdot \sum_{i=1}^3 |u_i - \tilde{u}_i|,$$

где  $C_R > 0$  – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

## §3. Исследование существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3)

В этом параграфе доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях  $T$ ) решения почти всюду задачи (1)-(3).

**Теорема 2.** Пусть

1.  $\varphi(x) \in C^{(3)}([0, \pi])$ ,  $\varphi^{(4)}(x) \in L_2(0, \pi)$  и  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ .
2.  $F(t, x, u_1, u_2, u_3), F_x(t, x, u_1, u_2, u_3), F_{u_i}(t, x, u_1, u_2, u_3)$  ( $i = \overline{1,3}$ )  $\in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$ .
3.  $F(t, 0, 0, u_2, 0) = F(t, \pi, 0, u_2, 0) \quad \forall t \in [0, T], u_2 \in (-\infty, \infty)$ .

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Так как из условий данной теоремы вытекает выполнение всех условий теоремы 3 из работы [2], то, по этой теореме 3 из работы [2], при условиях данной теоремы существует в малом обобщенное решение

$$u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^3 \quad (15)$$

задачи (1)-(3), причем функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе

(6). Покажем, что эта же функция  $u(t, x) \in B_{2,T}^3$  является (при тех же достаточно малых значениях  $T$ ) решением почти всюду задачи (1)-(3).

Из соотношения (15), в силу структуры пространства  $B_{2,T}^3$  и как показано в работе [2], следует, что

$$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]); \quad (16)$$

$$u_{xxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (17)$$

Кроме того, функция  $u(t, x) \in B_{2,T}^3$ , как обобщенное решение задачи (1)-(3), обладает свойствами

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (18)$$

Тогда, в силу условий 2 и 3 данной теоремы и соотношений (16)-(18), очевидно, что

$$\mathbf{F}(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x)) \in C([0, T] \times [0, \pi]), \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \in C([0, T]; L_2(0, \pi)), \quad (20)$$

$$\mathbf{F}(u(t, x)) \Big|_{x=0} = \mathbf{F}(u(t, x)) \Big|_{x=\pi} = 0 \quad (t \in [0, T]). \quad (21)$$

Теперь, пользуясь соотношениями (19)-(21), преобразуем систему (6), после интегрирования по частям по  $x$  один раз в ее правой части, к виду (11), т.е. функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе (11).

Далее, пользуясь соотношениями (16), примем обозначения:

$$\|F_x(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x))\|_{C(\bar{Q}_T)} \equiv C_0, \quad (22)$$

$$\|F_{u_i}(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x))\|_{C(\bar{Q}_T)} \equiv C_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (23)$$

где  $Q_T \equiv (0, T) \times (0, \pi)$ , а  $u_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – обозначения аргументов функции  $F(t, x, u_1, u_2, u_3)$ .

Тогда очевидно, что  $\forall t \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$ :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \right| \leq C_0 + C_1 \cdot \|u_x(t, x)\|_{C(\bar{Q}_T)} + C_2 \cdot \|u_{xx}(t, x)\|_{C(\bar{Q}_T)} + C_3 \cdot |u_{xxx}(t, x)|. \quad (24)$$

Следовательно,  $\forall t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \right\|_{L(0, \pi)} &\leq \pi \cdot \{C_0 + C_1 \cdot \|u_x(t, x)\|_{C(\bar{Q}_T)} + C_2 \cdot \|u_{xx}(t, x)\|_{C(\bar{Q}_T)}\} + \\ &+ C_3 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left\| \|u_{xxx}(t, x)\|_{L_2(0, \pi)} \right\|_{C([0, T])} \equiv C_4 < +\infty. \end{aligned} \quad (25)$$

Кроме того, очевидно, что  $\forall n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $t \in [0, T]$ :

$$\int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^4(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{n^4} \cdot (1 - e^{-n^4 t}) \leq \frac{1}{n^4}. \quad (26)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (25) и (26), из (11) получаем, что  $\forall n (n=1,2,\dots)$  и  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right| \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau = \\ &= |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right\|_{L(0, \pi)} \cdot e^{-n^4(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot C_4 \cdot \int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau \leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot C_4 \cdot \frac{1}{n^4} = |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot C_4 \cdot \frac{1}{n^5}; \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + 2 \cdot \left( \frac{2}{\pi} \cdot C_4 \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + \\ &+ \frac{8}{\pi^2} \cdot C_4^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{4}{3} \cdot C_4^2, \end{aligned} \quad (27)$$

причем сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2$  следует, в силу условия 1 данной теоремы, из оценки (13) для  $k=4$ .

Из (27) следует, что

$$\|u\|_{B_{2,T}^4}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^2 < +\infty,$$

т.е.

$$u(t, x) \in B_{2,T}^4. \quad (28)$$

Из соотношения (28), в силу оценок (14) для  $k=4$ , следует, что

$$\|u\|_{B_{1,T}^3} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^4}, \quad (29)$$

следовательно

$$\|u\|_{B_{1,T}^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < +\infty. \quad (30)$$

Из (30) следует, что

$$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (31)$$

С другой стороны, из соотношения (28), в силу оценок

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u_{xxxx}^2(t, x) dx &= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot u_n(t))^2 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^4}^2 \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (32)$$

и структуры пространства  $B_{2,T}^4$ , дополнительно следует, что

$$u_{xxxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (33)$$

Далее, в силу условия 2 данной теоремы и свойств (31) функции  $u(t, x)$ , очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (34)$$

Тогда из (11') видно, что

$$u'_n(t) \in C([0, T]) \quad \forall n (n = 1, 2, \dots). \quad (35)$$

Примем обозначение:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \right\|_{C(\bar{Q}_T)} \equiv C_5. \quad (36)$$

Пользуясь обозначением (36) и оценкой (26), из (11') получаем, что  $\forall n (n = 1, 2, \dots)$  и  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} |u'_n(t)| &\leq n^4 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot n^3 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right| \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right| dx \leq n^4 \cdot |\varphi_n| + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot n^3 \cdot C_5 \cdot \pi \cdot \int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot C_5 \cdot \pi \leq \\ &\leq n^4 \cdot |\varphi_n| + 2n^3 \cdot C_5 \cdot \frac{1}{n^4} + 2C_5 \cdot \frac{1}{n} = n^4 \cdot |\varphi_n| + 4C_5 \cdot \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + 2 \cdot (4C_5)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + \\ &+ 32C_5^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{16}{3} \pi^2 \cdot C_5^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) следует, что

$$\|u_t\|_{B_{2,T}^0}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 < +\infty,$$

т.е.

$$u_t(t, x) \in B_{2,T}^0. \quad (38)$$

Далее, из (38), в силу оценок

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u_t^2(t, x) dx &= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (u'_n(t))^2 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u_t\|_{B_{2,T}^0}^2 \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (39)$$

и структуры пространства  $B_{2,T}^0$ , следует, что

$$u_t(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (40)$$

Таким образом, из соотношений (31), (33) и (40) следует, что функция  $u(t, x)$  удовлетворяет условию а) определения решения почти всюду задачи (1)-(3). Кроме того, функция  $u(t, x)$ , как обобщенное решение задачи (1)-(3), удовлетворяет всем условиям (2) и (3) в обычном смысле, т.е. выполнено и условие в) определения решения почти всюду задачи (1)-(3). Значит, остается лишь проверка выполнения условия б) определения решения почти всюду задачи (1)-(3).

Далее, из систем (6), пользуясь обозначениями

$$F_n(u; t) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(u(t, x)) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]), \quad (41)$$

получаем, что при любом фиксированном  $p$  ( $p = 1, 2, \dots$ )  $\forall t \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p u'_n(t) \sin nx + \sum_{n=1}^p n^4 u_n(t) \sin nx &= \sum_{n=1}^p [u'_n(t) + n^4 u_n(t)] \sin nx = \\ &= \sum_{n=1}^p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(u(t, x)) \sin nx \, dx \cdot \sin nx = \sum_{n=1}^p F_n(u; t) \sin nx. \end{aligned} \quad (42)$$

Теперь, пользуясь фактами (40), (33) и (19), при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$ , переходя к пределу по метрике  $L_2(0, \pi)$ , из (42) получаем, что

$$u_t(t, x) + u_{xxxx}(t, x) = F(u(t, x)) \quad (43)$$

для почти всех  $x \in [0, \pi]$ . Следовательно

$$u_t(t, x) + u_{xxxx}(t, x) = F(u(t, x)) \quad \text{почти всюду в } (0, T) \times (0, \pi), \quad (44)$$

т.е. функция  $u(t, x)$  удовлетворяет условию б) определения решения почти всюду задачи (1)-(3).

Таким образом, функция  $u(t, x)$  удовлетворяет всем условиям оп-

ределения решения почти всюду задачи (1)-(3), т.е. она является решением почти всюду задачи (1)-(3), причем, в силу (28) и (38),

$$u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}. \quad (45)$$

Теорема доказана.

#### §4. Первая априорная оценка для решений почти всюду задачи (1)-(3)

Стандартным методом доказана следующая теорема об априорной ограниченности (в определенном смысле) решений почти всюду задачи (1)-(3).

**Теорема 3.** Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t, x, u, u_x, u_{xx}) = f_0(t, x, u, u_x, u_{xx}) + f_1(x, u) + (f_2(x, u_x))_x, \quad (46)$$

где

а)  $f_0(t, x, u_1, u_2, u_3) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$  и в  $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3$

$$|f_0(t, x, u_1, u_2, u_3)| \leq C_1 \cdot (1 + |u_1| + |u_2| + |u_3|), \quad C_1 = \text{const} > 0; \quad (47)$$

б)  $f_1(x, u) \in C([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$  и  $\forall x \in [0, \pi], u \in (-\infty, \infty)$

$$\int_0^u f_1(x, \xi) d\xi \equiv g_1(x, u) \leq C_2 + \delta_1 \cdot u^2, \quad C_2 = \text{const} > 0, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_1 \cdot \frac{\pi^4}{3} < \frac{1}{2}; \quad (48)$$

в)  $f_2(x, V) \in C^{(1)}([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$  и  $\forall x \in [0, \pi], V \in (-\infty, \infty)$

$$-\int_0^V f_2(x, \xi) d\xi \equiv g_2(x, V) \leq C_3 + \delta_2 \cdot V^2, \quad C_3 = \text{const} > 0,$$

$$\delta_2 \geq 0, \quad \delta_1 \cdot \frac{\pi^4}{3} + \delta_2 \cdot \pi^2 < \frac{1}{2}. \quad (49)$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^T \int_0^\pi u_t^2(t, x) dx dt \leq C_0; \quad \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (50)$$

#### §5. Вторая априорная оценка для решений почти всюду задачи (1)-(3)

Пользуясь теоремой 3 о справедливости априорных оценок (50) для решений почти всюду задачи (1)-(3), доказана следующая теорема о справедливости более сильной, чем (50) априорной оценки для решений почти всюду задачи (1)-(3).

**Теорема 4.** Пусть

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot |\varphi_n| < +\infty$ , где числа  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) определены соотношением (7).
2. Выполнены все условия теоремы 3.

Тогда для всевозможных решений почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t, x)\|_{B_{1,T}^2} \leq C_0. \quad (51)$$

#### **§6. Исследование существования в целом решения почти всюду задачи (1)-(3)**

Пользуясь теоремой 4, доказана следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

**Теорема 5.** Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.
  2. Выполнены все условия теоремы 3.
- Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.

**Замечание.** В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [2]-[4], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщенного решения задачи (1)-(3).

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс...докт. физ.-мат. наук – Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319с.
2. Агаева С.А. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. I. – Бакинский Государственный Университет, Баку, 2005г., 35 стр. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ, Баку, 27.12.2005, №2785 –Аз.)
3. Агаева С.А. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. –Тезисы научной конференции, посвященной 75-летию члена корреспондента НАНА, д.ф.-м.н., профессора Я.Дж.Мамедова, Баку, 22 февраля 2006г., с.13-14.
4. Худавердиев К.И., Агаева С.А. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. I. –Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2006г., №1, с. 5-14.

**DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİKLƏR  
ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ  
HƏLLİNİN TƏDQIQI. II.**

**K.İ.XUDAVERDİYEV, S.A.AĞAYEVA**

**XÜLASƏ**

İş dördüncü tərtib yarım-xətti parabolik tənliklər üçün birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə baxılan məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Furiye metodunun formal sxemini tətbiq etdikdən sonra axtarılan  $u(t, x)$  funksiyasının  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  sistemi üzrə naməlum  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) Furiye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti integral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. İşdə öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin qlobal yeganəliyi, lokal varlığı və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

**INVESTIGATION OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION  
OF A ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A FOURTH  
ORDER SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS. II.**

**K.I.KHUDAVERDIYEV, S.A.AGAYEVA**

**SUMMARY**

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for a semilinear fourth order parabolic equations. Conception of almost everywhere solution for the mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) of the sought solution  $u(t, x)$  based on the system  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ . Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the almost everywhere solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.